

Leçon 148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

[Goz] : *Théorie de galois*, Ivan Gozard

[Gri] : *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone

[Li] : *Cours d'analyse fonctionnelle*, Daniel Li

[Man-Mne] : *Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné

[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi

[Rou] : *Petit guide de calcul différentiel*, François Rouvière

I Partie A - De retour en L1 [Gri]

I.1 Familles libres, génératrices, bases

■ **Déf 1 (Famille libre) :**

■ **Déf 2 (Famille génératrice, dimension finie) :**

■ **Ex 3 :** Exemples dans [Gri].

■ **Ex 4 :** Polynômes, exponentielles (non génératrice).

■ **Prop 5 :** Une famille est liée si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

■ **Déf 6 (Base) :**

■ **Ex 7 :** Base canonique.

■ **Ex 8 :** Polynômes de degrés échelonnés

■ **Prop 9 :** Une famille est une base si et seulement si chaque vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base.

Rem 10 : Bijection avec $\mathbb{K}^n$.

■ **Thm 11 (Base incomplète) :**

I.2 Dimension

■ **Thm 12 (Dimension) :**

Rem 13 : Dépendance au corps de base.

■ **Ex 14 :** Exemples usuels.

■ **Ex 15 :** Formes n -linéaires et déterminant.

■ **Ex 16 :** Espace des solutions d'une EDOL.

■ **Prop 17 :** Si F est un sev de E , alors $\dim(F) \leq \dim(E)$ avec égalité ssi $F = E$.

■ **Ex 18 :** Exemples géométriques.

App 19 : Très utile pour montrer des égalités d'ev.

■ **Prop 20 (Somme directe) :**

■ **Prop 21 (Supplémentaire) :**

■ **Prop 22 (Formule de Grassman) :**

I.3 Espaces vectoriels normés [Li]

■ **Déf 23 (Équivalences de normes) :**

■ **Contre-Ex 24 :** Norme $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur $\mathcal{C}([0, 1])$.

■ **Thm 25 (Équivalences des normes en dim finie) :**

App 26 : Toute les applications linéaires sont continues en dim finie.

■ **Thm 27 (Théorème de Riesz) :**

App 28 : Tout ev de dim finie est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ muni de l'une de ses normes usuelles.

II Partie B - De retour II en L1 [Gri][Rom]

II.1 Notion de rang

■ **Déf 29 (Rang de vecteurs) :**

■ **Ex 30 :** Rang d'une base.

■ **Déf 31 (Rang d'une matrice) :**

■ **Ex 32 :** Rang et matrice de Gram

■ **Ex 33 :** Exemple numérique [Gri] avec pivot de Gauss.

■ **Déf 34 (Rang endomorphisme) :**

■ **Prop 35 :** Le rang d'un endomorphisme et de sa matrice dans une base coïncident.

II.2 Propriétés [Cal-Per] [Rou]

App 36 : Une matrice et sa transposée ont même rang.

Thm 37 (Théorème du rang) :

Cor 38 : u est injective ssi surjectif ssi bijectif.

Thm 39 (Extrema liés) :

 **Dév 40 (La matrice la plus proche de chez vous) :**

II.3 Dualité

Déf 41 (Espace dual) :

Ex 42 : Espace dual de R^n .

Prop 43 : Dimension du dual

App 44 : E et E^* sont isomorphes.

Thm 45 (Base duale) :

Ex 46 : Polynômes interpolateurs.

III Partie C - Réduction [Man-Mne] [Rom] [Gri]

Déf 47 (Polynôme minimal (Existence)) :

Thm 48 (Critère de diagonalisabilité par polynôme annulateur) :

Rem 49 : u diagonalisable ssi π_u est scindé à racines simples.

Ex 50 : Projecteurs et symétries.

Ex 51 : Exemple numérique ([Gri]).

Thm 52 (Co-diagonalisation) :

Ex 53 : Diagonalisabilité de l'endomorphisme $\Theta_{A,B} : M \rightarrow AMB$.

 **Dév 54 (Jordan) :**

IV Partie E - Théorie des corps [Goz]

IV.1 Bases de la théorie

Déf 55 (Extension de corps) :

Prop 56 : Une extension L/K possède une structure de K -algèbre.

Ex 57 : $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, $K(X)/K[X]$. Tout corps est un sur-corps de son sous-corps premier.

Déf 58 (Degré d'une extension) :

Thm 59 (Base télescopique) :

Cor 60 (Multiplicativité du degré) :

Ex 61 : Exemple canonique d'un corps de rupture.

IV.2 Nombres algébriques

Déf 62 (Élément algébrique, polynôme minimal) :

Déf 63 (Extension algébrique) :

Prop 64 : x est algébrique ssi $K[x] = K(x)$ ssi $[K[x] : K] < +\infty$.

Rem 65 : Isomorphisme entre $K[x]$ et $K[X]/\pi_x$.

Ex 66 : Extensions finies.

Ex 67 : $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ est de degré 4.

IV.3 Corps cyclotomiques

Déf 68 (Corps cyclotomiques) :

Ex 69 : Exemples de corps et polynômes cyclotomiques.

 **Dév 70 (Intersection de corps cyclotomiques) :**